Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

3-лекция. Интерполирование функций

Цель лекции – сформировать у студентов понимание основных методов интерполирования и научить строить интерполяционные приближения функций по заданным узлам, анализировать точность интерполяции и оценивать погрешность полученных приближений.

План лекции:

1. Конечные разности различных порядков
2. Таблица конечных разностей
3. Обобщённая степень
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

1 Конечные разности различных порядков

Пусть

$$y = f(x)$$

— заданная функция. Обозначим через

$$\Delta x = h$$

фиксированную величину приращения аргумента (*шаг*). Тогда выражение

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.1}$$

называется *первой конечной разностью* функции y. Аналогично определяются конечные разности высших порядков:

$$\Delta^n y = \Delta\big(\Delta^{n-1} y\big), \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Например,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y &= \Delta\,(\Delta y) = \Delta\big[f(x+\Delta x) - f(x)\big] = \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x)\\ &= \underbrace{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}_{\Delta f(x+\Delta x)} - \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta f(x)}\\ &= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y &= \Delta\left(\Delta^2 y\right) = \Delta\Big[f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)\Big] =\\ &= \Delta f(x+2\Delta x) - 2\Delta f(x+\Delta x) + \Delta f(x) =\\ &= \underbrace{f(x+3\Delta x) - f(x+2\Delta x)}_{\Delta f(x+2\Delta x)} - 2\underbrace{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}_{\Delta f(x+\Delta x)} + \underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta f(x)}\\ &= f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x),\end{aligned}$$

$$\Delta^4 y = \Delta\left(\Delta^3 y\right) = \dots \quad .$$

Конечная разность $n-$го порядка определяется последовательными значениями функции $f(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned}&\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\,n-k} C_k^n \; f(x + k\,\Delta x) =\\ &\quad = (-1)^n C_0^n f(x) + (-1)^{\,n-1} C_1^n f(x+\Delta x) + (-1)^{\,n-2} C_2^n f(x+2\Delta x) + \dots + C_n^n f(x+n\Delta x), \quad n = 1,2,3,\dots\end{aligned}$$

где $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\qquad n = 0,1,2,\dots,\; k = 0,1,\dots,n.$

Пример. Построить конечные разности для функции

$$f(x) = x^3,$$

считая шаг $\Delta x = 1$. **Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned}&\Delta f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,\\ &\Delta^2 f(x) = \big[3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1\big] - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6,\\ &\Delta^3 f(x) = \big[6(x+1) + 6\big] - (6x+6) = 6,\\ &\Delta^n f(x) = 0 \quad \text{при } n > 3.\end{aligned}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на отрезке $[x, x{+}n\Delta x]$. Тогда справедлива важная формула

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x), \tag{1.2}$$

где

$$0 < \theta < 1.$$

Формулу (1.2) проще всего доказать, используя метод математической индукции. В самом деле, при $n = 1$ мы получаем теорему Лагранжа о конечном приращении функции и, следовательно, формула (1.2) верна. Пусть теперь при $k < n$ имеем:

$$\Delta^k f(x) = (\Delta x)^k f^{(k)}(x + \theta' k\Delta x), \quad 0 < \theta' < 1.$$

Тогда

$$\Delta^{k+1} f(x) = \Delta^k \big[f(x + \Delta x) - f(x)\big] = (\Delta x)^k \big[f^{(k)}(x + \Delta x + \theta' k\Delta x) - f^{(k)}(x + \theta' k\Delta x)\big].$$

Применяя теорему Лагранжа к получившемуся приращению производной $f^{(k)}(x)$, будем иметь:

$$\Delta^{k+1} f(x) = (\Delta x)^k \Delta x\, f^{(k+1)}\big(x + \theta' k\Delta x + \theta'' \Delta x\big) = (\Delta x)^{k+1} f^{(k+1)}\big(x + \theta(k+1)\Delta x\big),$$

где $0 < \theta < 1$. Таким образом, установлен переход от k к $k+1$, и следовательно формула (1.2) доказана. Из формулы (1.2) имеем

$$f^{(n)}(x + \theta n\Delta x) = \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и предполагая, что производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна, получим

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \tag{1.3}$$

Следовательно, при малых Δx справедлива приближённая формула

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}. \tag{1.4}$$

2 Таблица разностей

Часто приходится рассматривать функции $y = f(x)$, заданные табличными значениями $y_i = f(x_i)$ для системы равноотстоящих точек x_i $(i = 0, 1, 2, \dots)$, где

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}.$$

Конечные разности последовательности y_i естественно определяются соотношениями:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

Из первого равенства имеем:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i.$$

Отсюда последовательно выводим:

$$y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i, \quad y_{i+3} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i, \quad \ldots, \quad y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i.$$

Используя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$y_{i+n} = y_i + C_1^n \Delta y_i + C_2^n \Delta^2 y_i + \cdots + \Delta^n y_i.$$

Обратно, имеем:

$$\Delta^n y_i = \big[(1+\Delta) - 1\big]^n y_i = \Delta y_i - C_1^n \Delta^{n-1} y_i + C_2^n \Delta^{n-2} y_i - \cdots + (-1)^n y_i,$$

или

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_1^n y_{n+i-1} + C_2^n y_{n+i-2} - \cdots + (-1)^n y_i.$$

Например:

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad \Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме таблиц двух видов:

Таблица 1: **Горизонтальная таблица разностей**

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Таблица 2: **Диагональная таблица разностей**

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			

Пример. Составим горизонтальную таблицу разностей функции

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

от начального значения $x_0 = 0$, приняв шаг $h = 1$.

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2, \quad y_0 = -1,\ y_1 = 2,\ y_2 = 13$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 11, \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 8$$

Эти значения заносим в таблицу. Так как функция — полином третьей степени, третья разность постоянна:

$$\Delta^3 y_i = 2 \cdot 3! = 12.$$

Дальнейшее заполнение таблицы можно проводить с помощью суммирования:

Таблица 3: **Горизонтальная таблица разностей кубической функции**

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12

$$\Delta^2 y_{i+1} = \Delta^2 y_i + 12, \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + \Delta^2 y_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

3 Обобщённая степень

В дальнейшем нам понадобится понятие об обобщенной степени.

Определение 3.1. Обобщенной n-степенью числа x называется произведение n сомножителей, первый из которых равен x, а каждый следующий на h меньше предыдущего:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdots\big[x-(n-1)h\big], \tag{3.1}$$

где h — некоторое фиксированное постоянное число.

Показатель обобщенной степени обычно записывается в квадратных скобках. Полагают $x^{[0]} = 1$. При $h = 0$ обобщенная степень (3.1) совпадает с обычной:

$$x^{[n]} = x^n.$$

Вычислим конечные разности для обобщенной степени, полагая $\Delta x = h$. Для первой разности имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{[n]} &= (x+h)^{[n]} - x^{[n]} \\
&= (x+h)x \cdots \big[x-(n-2)h\big] - x(x-h)\cdots\big[x-(n-1)h\big] \\
&= x(x-h)\cdots\big[x-(n-2)h\big]\Big\{(x+h) - \big[x-(n-1)h\big]\Big\} \\
&= x(x-h)\cdots\big[x-(n-2)h\big]\cdot nh = nh\, x^{[n-1]}.
\end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta x^{[n]} = nh\, x^{[n-1]}. \tag{3.2}$$

Подсчитаем вторую разность:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta\big(nh\, x^{[n-1]}\big) = nh\,\Delta x^{[n-1]} = nh\,(n-1)h\, x^{[n-2]} = nh^2(n-1)\, x^{[n-2]}.$$

Итак,

$$\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2 x^{[n-2]}.$$

Методом математической индукции легко доказать общую формулу

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdots\big[n-(k-1)\big]\, h^k\, x^{[n-k]},$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно,

$$\Delta^k x^{[n]} = 0 \quad \text{при } k > n.$$

Из формулы (3.2) вытекает также простая формула конечного суммирования. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — равноотстоящие точки с шагом h:

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим сумму

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]}.$$

Так как в силу формулы (3.2) имеем

$$x^{[n]} = \frac{\Delta x^{[n+1]}}{h(n+1)},$$

то

$$S_N = \frac{1}{h(n+1)} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_i^{[n+1]} = \frac{1}{h(n+1)} \Big(x_1^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} + x_2^{[n+1]} - x_1^{[n+1]} + \cdots$$
$$+\ x_N^{[n+1]} - x_{N-1}^{[n+1]} \Big) = \frac{1}{h(n+1)} \Big(x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]} \Big).$$

Итак,

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i^{[n]} = \frac{x_N^{[n+1]} - x_0^{[n+1]}}{h(n+1)}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) аналогична формуле Ньютона—Лейбница для целой положительной степени.

4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение конечной разности первого, второго и третьего порядков.
2. Как выражается первая конечная разность функции $f(x)$ через значения функции в узлах?
3. Свяжите конечные разности разных порядков с производными функции.
4. Приведите пример вычисления второй конечной разности для функции $f(x) = x^2$ с шагом $h = 1$.
5. Как строится таблица конечных разностей для равномерной сетки значений функции?
6. Для чего используется таблица конечных разностей при интерполяции?
7. В чем отличие таблиц прямых и обратных конечных разностей?
8. Дайте определение обобщённой степени (формула Ньютона для $(x+a)^n$ с любым действительным n) и приведите пример её использования в разложении функции.

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–16].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.

[2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов.* Москва: Наука, 1989.

[3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие.* Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.

[4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python.* Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие.* 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

[6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы.* Алматы: 2019.

[7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы.* Алматы: Білім, 2016.

[8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики.* Москва: Наука, 1970.

[9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений.* Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. Гл. I.

[10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций.* Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. Гл. I, §§ 18–21.

[11] Скарборо, Дж. *Численные методы математического анализа.* Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. IV, разд. II.

[12] Брадис, В. М. *Теория и практика вычислений.* Москва: Учпедгиз, 1935. Гл. IX.

[13] Милн, В. Э. *Численный анализ.* Москва: ИЛ, 1961. Гл. III, VI.

[14] Ремез, Е. Я. *Общие вычислительные методы чебышевского приближения.* Киев: Изд. АН УССР, 1957. Ч. 1, Гл. I.

[15] Леднев, Н. А., ред. *Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах.* Москва: Советская наука, 1959. Гл. III.

[16] Фаддеева, В. Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1950. Гл. III, § 27.